2020　0425　３Ｓ　高数演習　４月　因数分解

高校への数学の問題を解いて、数学の力をつけたい君たちに、問題を作りました。どんどん利用してください。

式の展開：因数分解の基本

1．次の式を展開しなさい．

（１）　$(2x+3)(x-1)$　　（20　鹿児島）

（２）　$(2x+5y)(3x-12y)$　　（20　敬愛学園）

（３）　$(x+1)(x-9)$　　（20　三浦学苑）

（４）　$(x+7)(x-2)$　　（20　作新学院）

（５）　$(2x+3)(2x-1)$　　（20　柳川）

（６）　$(2x-3)^2$　　（20　初芝富田林）

（７）　$(2x-y)^2$　　（20　仙台城南）

（８）　$(x-5)(x+5)$　　（20　明浄学院）

2☆ 次の式を展開しなさい.

（１）　$(x+3)(x-3)-(x-2)^2$　（20　柳川）

（２）　$(x+4)(x-9)-(x-6)(x+6)$

（20　茗溪学園）

（３）　$(x+2)(x-2)+(3x-4)(2x-1)$

（20　和歌山信愛）

（４）　$(4a-1)(a+3)-(2a-5)^2$

（20　鹿児島純心女子）

（５）　$(2a-3b)^2-(2a-3b)(2a+3b)$

（20　花園）

（６）　$(x+3y)(x-5y)+(x-2y)^2$
$-(x+y)(x-y)$　（20　立正大付立正）

（７）　$(a+b)^2-(a-b)^2$

（20　近畿大付和歌山）

3. 次の式を因数分解しなさい.

（１）　$6ax-4a$　　（20　明浄学院）

（２）　a^2+5a+6　　（20　初芝富田林）

（３）　$x^2-13x+36$　　（20　仙台城南）

（４）　$x^2+11x-12$　　（20　大阪暁光）

（５）　$x^2-7x-30$　　（20　鹿児島）

（６）　$25x^2-4y^2$　　（20　大牟田）

（７）　$x^2-xy-6y^2$　　（20　柳川）

2020　0425　３Ｓ　高数演習　４月　因数分解

4☆ 次の式を因数分解しなさい.

（１）　$2a^2-8a-10$　　（20　独協埼玉）

（２）　$2x^3+2x^2-12x$　　（20　宮城学院）

（３）　$9ax^3y-54ax^2y^2+81axy^3$

（20　国学院大久我山）

（４）　$(x+1)^2-4(x+1)-5$　（20　大宮開成）

（５）　$2(x-4)^2-2x+8$　　（20　独協埼玉）

（６）　$x^2(x+a)-y^2(x+a)$

（20　城西大付川越）

（７）　$(a+2b)(a+2b-1)-2$　（20　城北）

5☆ 次の式を因数分解しなさい．

（１）　$16x^2-y^2-4y-4$　（20　桐光学園）

（２）　a^2-4b^2+2a+1　（20　花園）

（３）　$(a-b)^2-6ac+6bc+9c^2$

（20　関西大北陽）

（４）　$ax+b-1-x+a+bx$　（20　中央大付）

6. 次の式の値を求めなさい.

（１）　$a=11$ のとき，a^2+4a-5 の値.

（20　海星）

（２）　$x=3.14$，$y=0.07$ のとき，x^2-4y^2 の値.

（20　細田学園）

（３）　$x=-\dfrac{1}{3}$，$y=-\dfrac{7}{3}$ のとき，

$3x^2-6xy+3y^2$ の値.　（20　東明館）

7. 次の計算をしなさい.

（１）　$2020^2-2019\times2021$

（20　東京農業大一）

（２）　29×31×901　　（20　土浦日本大）

8. 次の問いに答えなさい．

（１）　$ab+2a-b-2$ を因数分解しなさい．

（２）（１）を利用すると，

$ab+2a-b$

$=(a-\boxed{ア})(b+\boxed{イ})+\boxed{ウ}$

という式になります．空欄 $\boxed{ア}$ から $\boxed{ウ}$ に適する数を答えなさい．

（20　加藤学園暁秀）

9☆ 次の問いに答えなさい．

（１）　x，y についての連立方程式

$\begin{cases} ax+2by=9 \\ 3ax-by=-15 \end{cases}$ の解が，

$(x,\ y)=(-1,\ 3)$ であるとき，a，b の値を求めると，$a=\boxed{}$，$b=\boxed{}$ である．

（20　暁）

（２）　連立方程式 $\begin{cases} x-2y=11 \\ ax+4y=8 \end{cases}$ と

$\begin{cases} 2x+by=28 \\ 3x+y=12 \end{cases}$ の解が一致するとき，

$a=\boxed{}$，$b=\boxed{}$ である．

（20　千葉日本大一）

（３）　連立方程式 $\begin{cases} 2x+y=7 \\ x-2y=1 \end{cases}$ を解いて，

$3x-y$ の値を求めると，$\boxed{}$ となります．

（20　東海大付浦安）

解答・解説

1．乗法公式(☞ p.5～6)を正しく用いることができるかどうかを確認しましょう．

解　（1）　$(2x+3)(x-1)$

$=2x\times x-2x\times 1+3\times x-3\times 1$

$=2x^2-2x+3x-3$

$=\mathbf{2x^2+x-3}$

$(a+b)(c+d)$
$=ac+ad+bc+bd$

（2）　$(2x+5y)(3x-12y)$

$=2x\times 3x-2x\times 12y+5y\times 3x-5y\times 12y$

$=6x^2-24xy+15xy-60y^2$

$=\mathbf{6x^2-9xy-60y^2}$

（3）　$(x+1)(x-9)$

$=x^2+(1-9)x-1\times 9$

$=\mathbf{x^2-8x-9}$

$(x+a)(x+b)$
$=x^2+(a+b)x+ab$

（4）　$(x+7)(x-2)$

$=x^2+(7-2)x-7\times 2$

$=\mathbf{x^2+5x-14}$

（5）　$(2x+3)(2x-1)$

$=(2x)^2+(3-1)\times 2x$
$\quad -3\times 1$

$=\mathbf{4x^2+4x-3}$

$2x=A$ とおくと，
$(2x+3)(2x-1)$
$=(A+3)(A-1)$
$=A^2+2A-3$

（6）　$(2x-3)^2$

$=(2x)^2-2\times 2x\times 3+3^2$

$=\mathbf{4x^2-12x+9}$

（7）　$(2x-y)^2=(2x)^2-2\times 2x\times y+y^2$

$=\mathbf{4x^2-4xy+y^2}$

（8）　$(x-5)(x+5)$

$=x^2-5^2=\mathbf{x^2-25}$

$(a+b)(a-b)$
$=a^2-b^2$

2. 乗法公式を組み合わせて使いましょう．展開する式の前に‘－(マイナス)’がついているときは，要注意です(☞(３)以外)．

解　(１)　$(x+3)(x-3)-(x-2)^2$

－(　　)の中で展開，その後括弧を外す．

$=(x^2-9)-(x^2-4x+4)$

$=x^2-9-x^2+4x-4$

$=\mathbf{4x-13}$

(２)　$(x+4)(x-9)-(x-6)(x+6)$

$=(x^2-5x-36)-(x^2-36)$

$=x^2-5x-36-x^2+36$

$=\mathbf{-5x}$

(３)　$(x+2)(x-2)+(3x-4)(2x-1)$

$=(x^2-4)+(6x^2-3x-8x+4)$

$=x^2-4+6x^2-11x+4$

$=\mathbf{7x^2-11x}$

(４)　$(4a-1)(a+3)-(2a-5)^2$

$=(4a^2+12a-a-3)-(4a^2-20a+25)$

$=4a^2+11a-3-4a^2+20a-25$

$=\mathbf{31a-28}$

(５)　$(2a-3b)^2-(2a-3b)(2a+3b)$

$-(4a^2-12ab+9b^2)-(4a^2-9b^2)$

$=4a^2-12ab+9b^2-4a^2+9b^2$

$=\mathbf{-12ab+18b^2}$

(６)　$(x+3y)(x-5y)+(x-2y)^2$

$-(x+y)(x-y)$

$=(x^2-2xy-15y^2)+(x^2-4xy+4y^2)$

$-(x^2-y^2)$

$=x^2-2xy-15y^2+x^2-4xy+4y^2-x^2+y^2$

$=\mathbf{x^2-6xy-10y^2}$

(７)　$(a+b)^2-(a-b)^2$

$=(a^2+2ab+b^2)-(a^2-2ab+b^2)$

$=\mathbf{4ab}$　(☞注)

➡**注**　$(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$ と，
$(a+b)^2+(a-b)^2=2a^2+2b^2$
は，“準公式”として覚えておきましょう．

3. 因数分解の基本問題です．共通因数の括り出し，公式(☞ p.7)を確認しましょう．

解　(１)　$6ax-4a$

$=2a\times3x-2a\times2=\mathbf{2a(3x-2)}$

共通因数を括り出す．

(２)　a^2+5a+6

$=\mathbf{(a+2)(a+3)}$

[和が＋5，積が＋6 → ＋2と＋3]

(３)　$x^2-13x+36$

$=\mathbf{(x-4)(x-9)}$

[和が－13，積が＋36 → －4と－9]

(４)　$x^2+11x-12$

$=\mathbf{(x+12)(x-1)}$

[和が＋11，積が－12 → ＋12と－1]

(５)　$x^2-7x-30$

$=\mathbf{(x+3)(x-10)}$

[和が－7，積が－30 → ＋3と－10]

(６)　$25x^2-4y^2$

$=(5x)^2-(2y)^2$

$=\mathbf{(5x+2y)(5x-2y)}$

a^2-b^2
$=(a+b)(a-b)$

(７)　$x^2-xy-6y^2$

$=x^2-y\times x-6y^2$

$=\mathbf{(x+2y)(x-3y)}$

[和が－y，積が－$6y^2$ → ＋$2y$と－$3y$]

4. 共通因数を括り出したあと因数分解したり((１)～(３)，(６))，同じ形をした“カタマリ”を意識したり((４)，(５)，(７))，…因数分解の中級問題です．

解　(１)　$2a^2-8a-10$

$=2(a^2-4a-5)=\mathbf{2(a+1)(a-5)}$

(２)　$2x^3+2x^2-12x$

$=2x(x^2+x-6)=\mathbf{2(x+3)(x-2)}$

(３)　$9ax^3y-54ax^2y^2+81axy^3$

$=9axy(x^2-6xy+9y^2)$

$=\mathbf{9axy(x-3y)^2}$

(４)　$(x+1)^2-4(x+1)-5$

$=\{(x+1)+1\}\{(x+1)-5\}$

$=\mathbf{(x+2)(x-4)}$

$x+1=A$
とおくと，
A^2-4A-5

(５)　$2(x-4)^2-2x+8$

$=2(x-4)^2-2(x-4)$

$=2(x-4)\{(x-4)-1\}$

$=\mathbf{2(x-4)(x-5)}$

$x-4=A$
とおくと，
$2A^2-2A$

(６)　$x^2(x+a)-y^2(x+a)$

$=(x+a)(x^2-y^2)$

$=\mathbf{(x+a)(x+y)(x-y)}$

$x+a=A$
とおくと，
x^2A-y^2A

(７)　$(a+2b)(a+2b-1)-2$

$=(a+2b)\{(a+2b)-1\}-2$

$=(a+2b)^2-(a+2a)-2$

$=\{(a+2b)+1\}\{(a+2b)-2\}$

$=\mathbf{(a+2b+1)(a+2b-2)}$

$a+2b=A$
とおくと，
A^2-A-2

5．今度は，**4**.の(4)，(5)，(7)の形に自力で持ち込みましょう．

解　(1)　$16x^2-y^2-4y-4$

$=16x^2-(y^2+4y+4)$

$=(4x)^2-(y+2)^2$

$=\{4x+(y+2)\}\{4x-(y+2)\}$

$=(\boldsymbol{4x+y+2})(\boldsymbol{4x-y-2})$

(2)　a^2-4b^2+2a+1

$=(a^2+2a+1)-(2b)^2$

$=(a+1)^2-4b^2$

$=\{(a+1)+2b\}\{(a+1)-2b\}$

$=(\boldsymbol{a+2b+1})(\boldsymbol{a-2b+1})$

(3)　$(a-b)^2-6ac+6bc+9c^2$

$=(a-b)^2-6c(a-b)+9c^2$

$=\{(a-b)-3c\}^2$

$=(\boldsymbol{a-b-3c})^2$

(4)　$ax+b-1-x+a+bx$

$=(ax+a)+(bx+b)-(x+1)$

$=a(x+1)+b(x+1)-(x+1)$

$=(\boldsymbol{x+1})(\boldsymbol{a+b-1})$

6．数の計算にも，直接やる以外に，乗法公式や因数分解公式を応用できることがあります．

解　(1)　$a=11$ のとき，

$a^2+4a-5=(a+5)(a-1)$

$=(11+5)\times(11-1)=16\times10=\mathbf{160}$

(2)　$x=3.14$，$y=0.07$ のとき，

$x^2-4y^2=(x+2y)(x-2y)$

$=(3.14+0.14)\times(3.14-0.14)$

$=3.28\times3=\mathbf{9.84}$

(3)　$x=-\dfrac{1}{3}$，$y=-\dfrac{7}{3}$ のとき，

$3x^2-6xy+3y^2=3(x^2-2xy+y^2)$

$=3(x-y)^2=3\times\left(-\dfrac{1}{3}+\dfrac{7}{3}\right)^2=\mathbf{12}$

7．**6**.と同様に，工夫します．

解　(1)　$2020^2-2019\times2021$

$=2020^2-(2020-1)\times(2020+1)$

$=2020^2-(2020^2-1^2)=2020^2-2020^2+1^2=\mathbf{1}$

(2)　$29\times31\times901=(30-1)\times(30+1)\times901$

$=(30^2-1^2)\times901=(30^2-1^2)\times(30^2+1^2)$

$=(30^2)^2-(1^2)^2=30^4-1=810000-1$

$=\mathbf{809999}$

8．誘導に従えば，難はないでしょう．

解　(1)　$ab+2a-b-2$

$=(ab+2a)-(b+2)$

$=a(b+2)-(b+2)=(b+2)(a-1)$

$\therefore\ ab+2a-b-2=(\boldsymbol{a-1})(\boldsymbol{b+2})\cdots①$

(2)　①の左辺の-2を移項すると，

$ab+2a-b=(a-1)(b+2)+2$

よって，**ア**…1，**イ**…2，**ウ**…2

9．最後は連立方程式の応用問題です．

解　(1)　$\begin{cases}ax+2by=9\\3ax-by=-15\end{cases}$ の解が，

$(x,\ y)=(-1,\ 3)$であるから，

$\begin{cases}-a+6b=9 & \cdots\cdots①\\-3a-3b=-15 & \cdots\cdots②\end{cases}$

②より，$a+b=5\cdots②'$ であるから，①＋②′より，$7b=14$　$\therefore\ \boldsymbol{b=2}$

これを②′に代入すると，$a+2=5$　$\therefore\ \boldsymbol{a=3}$

(2)　$\begin{cases}x-2y=11\cdots①\\ax+4y-8\cdots②\end{cases}$ と $\begin{cases}2x+by=28\cdots③\\3x+y=12\cdots④\end{cases}$

の解が一致するとき，その解を

$(x,\ y)=(p,\ q)$とすると，

$\begin{cases}p-2q=11\cdots①'\\ap+4q=8\cdots②'\end{cases}$，$\begin{cases}2p+bq=28\cdots③'\\3p+q=12\cdots④'\end{cases}$

が成り立つ．

そこでまず，①′と④′を連立させて解くと，$p=5$，$q=-3$ となるから，これらを②′と③′に代入すると，$5a-12=8$，$10-3b=28$

よって，これらより，$\boldsymbol{a=4}$，$\boldsymbol{b=-6}$

(3)　$\begin{cases}2x+y=7\cdots㋐\\x-2y=1\cdots㋑\end{cases}$ において，㋐＋㋑をつくると，$3x-y=8$

➡注　具体的に解 x，y を求める必要がなかったわけです．

連立方程式の解を $x=p$，$y=q$ とすると，

$\begin{cases}2p+q=7\\p-2q=1\end{cases}$ が成り立ちます．このときの，$3p-q$ の値を求める，と考えれば分かりやすい話です．